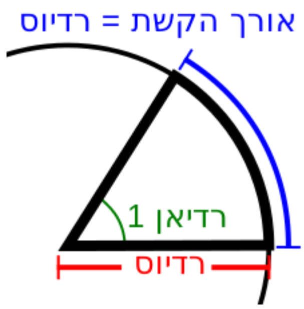
פרק 1- פונקציות טריגונומטריות

1.1 הקדמה:

בפיסיקה נהוג לעבוד ביחידות מידה של רדיאנים ולא של מעלות. הרדיאן מוגדר כזווית היוצאת ממרכז מעגל ונוצרת על ידי קשת שאורכה שווה לאורך של רדיוס המעגל- R. כיוון שהיקף המעגל הוא $2\pi R$ במעגל כולו יש 2π רדיאנים.



בכדי לעבור ממעלות לרדיאנים נשתמש בקשר הבא: $\boxed{\alpha(rad)=\frac{\alpha(\deg ree)\cdot\pi}{180}}$

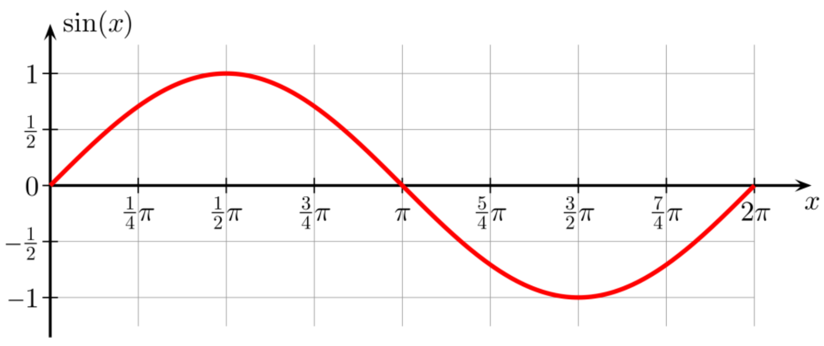
1.2 הפונקציות הטריגונומטריות הבסיסיות:

פונקציות טריגונומטריות הן פונקציות המתארות קשרים ויחסים בין זוויות. אלו פונקציות המאופיינות בכך שיש להן התנהגות מחזורית ולכן הן משמשות המון בתיאור תופעות שכאלו.

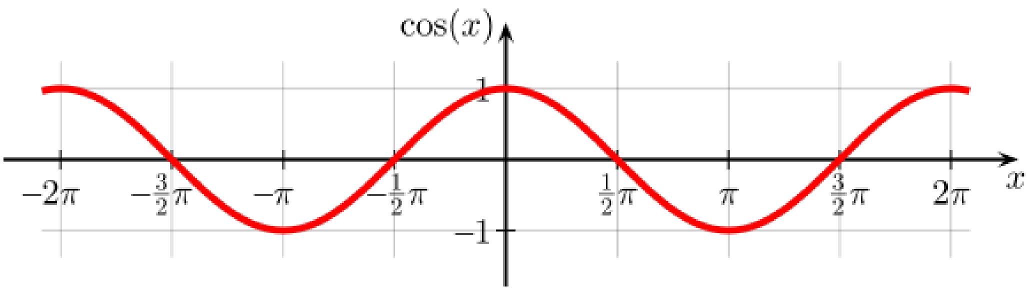
פונקציה מחזורית- הגדרה: פונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום D נקראת מחזורית אם קיים מספר $T\neq 0$ כך שלכל X בתחום D $f(x\pm T)=f(x)$.

נדגים בעזרת הגרפים של הפונקציות $\sin x,\cos x$ ו- $\tan x$.

$$y=\sin x$$



$$y = \cos x$$



נשים לב למספר דברים חשובים:

1. מחזור הפונקציה $\sin x$ ו- $\cos x$ הוא $T = 2\pi$, כלומר, בכל התקדמות של 2π על ציר ה-x הפונקציות חוזרות על עצמן.

2. הפונקציות חסומות בין $-1 \le y \le 1$ ומוגדרת לכל x.

נלמד מושג נוסף- **זוגיות\אי זוגיות של פונקציה**:

פונקציה מוגדרת כפונקציה זוגית אם $f(-x) = f(x)$ ויש לה סימטריה מסביב לציר y, למשל- $\cos x$.

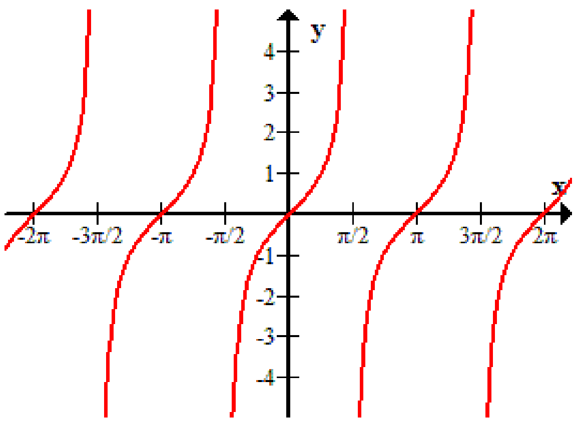
דוגמא: נוכל לראות בגרף ש- $\cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2})$.

פונקציה מוגדרת אי זוגית אם $f(-x) = -f(x)$ והיא סימטרית סביב ראשית הצירים, למשל $\sin x$.

דוגמא: נוכל לראות בגרף ש- $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2})$.

נתבונן על הגרף של $\tan x$:

$$y = \tan x$$



דגשים:

1. הפונקציה לא מוגדרת ב- $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ כאשר $k=0,1,2...$ מספר שלם. זאת כיוון שאלו הנקודות שבהן $\cos x=0$ והרי $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$.

2. מחזור הפונקציה בשונה מ-sinx ומ-cosx הוא $T=\pi k$.

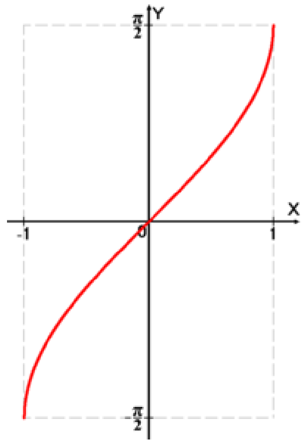
1.3 הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות:

הקדמה:

פונקציה חד-חד ערכית: פונקציה היא חד-חד ערכית אם לכל y קיים לכל היותר x אחד, כך ש- $y=f(x)$.
כעת נוכל להגדיר מהי פונקציה הפוכה-
אם $y=f(x)$ והיא פונקציה ח.ח.ע- אז קיימת $g=f^{-1}$, הפונקציה ההפוכה של f . זוהי פונקציה המחזירה את x ו- y הוא המשתנה התלוי בה - $x=g(y)$.
אלו פונקציות סימטריות ביחס לישר, כלומר, אם נעמיד מראה על ציר $y=x$ נראה את הפונקציה ההפוכה. נדגים זאת על ידי הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות-

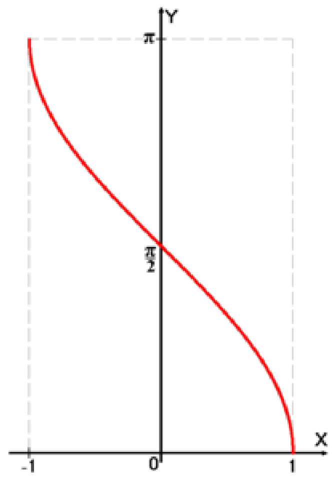
$$y=\arcsin x$$

ראשית נשים לב ש-sinx היא ח.ח.ע רק בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$, $-1\le y\le 1$. לכן תחום ההגדרה של $\arcsin x$ הוא $-1\le x\le 1$, $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$.



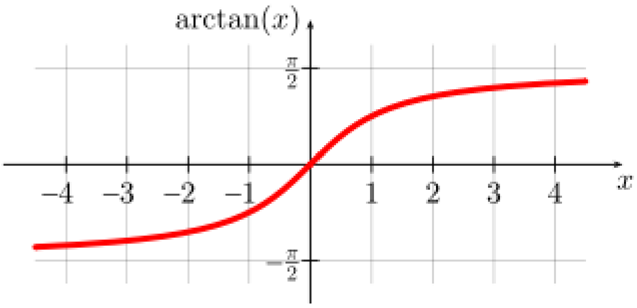
בכדי לשרטט את הפונקציות ההפוכות נתאים כל נקודה (x,y) על הגרף המקורי לנקודה (y,x) על הגרף של הפונקציה ההפוכה.

גם לה תחום הגדרה מצומצם- $0\le y\le\pi$, $-1\le x\le 1$



$$y=\arctan x$$

ת.הגדרה: $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$, $-\infty\le x\le\infty$.



1.4 הזהויות הטריגונומטריות

זהויות טריגונומטריות הם קשרים בין הפונקציות שבעזרתם אנו יכולים לפשט ביטויים רבים.

זהויות שימושיות:

$1.\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$2.\sin(-x)=-\sin x$

$3.\cos(-x)=\cos x$

$4.\sin(2x)=2\sin x\cos x$

$5.\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$6.\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

$7.\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$

$8.\sin(\pi-x)=\sin x$

$9.\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x$

$10.\cos(\pi\pm x)=-\cos x$

$11.\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1$

$12.\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$