

## פרק 3-חקירת פונקציה

$$1. y = 3 \sin(2x)$$

תחום הגדרה- כפי שנתון  $0 \leq x \leq 2\pi$

חיתוך עם הצירים-

$$y(x=0) = 3 \sin(2 \cdot 0) = 0 \Rightarrow (0,0)$$

$$y = 0 \Rightarrow 0 = 3 \sin(2x)$$

$$2x = \pi k$$

$$x = \frac{\pi k}{2}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

נחפש את ה-k-ים עבורם X עדיין בתחום ההגדרה:

$$k = 0, x = 0 \Rightarrow (0,0)$$

$$k = 1, x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

$$k = 2, x = \pi \Rightarrow (\pi, 0)$$

$$k = 3, x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$$

$$k = 4, x = 2\pi \Rightarrow (2\pi, 0)$$

תחומי עלייה וירידה- נגזור את הפונקציה ונבדוק מתי הנגזרת חיובית (עלייה) ומתי שלילית (ירידה)

$$y' = 6 \cos(2x)$$

$$y' > 0$$

$$6 \cos(2x) > 0$$

יש מספר שיטות לפתור אי השוויון הזה. כאן נציג דרך אחת- אם X מוגדר בין 0 ל-2 פאי אז 2X מוגדר בין 0 ל-4 פאי, נבדוק איפה בתחום הזה  $\cos(x)$  מקבל ערכים חיוביים, על ידי שרטוט הגרף של  $\cos(x)$ . ונמצא כי הערכים חיוביים בתחומים הבאים:

$$0 < 2x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{3\pi}{2} < 2x < \frac{5\pi}{2} \Rightarrow \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$$

$$\frac{7\pi}{2} < 2x < 4\pi \Rightarrow \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$$

ובכל שאר התחום נקבל ערכים שליליים, כלומר ירידה:

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$$

נקודות קיצון- נדרוש את איפוס הנגזרת:

$$y' = 0$$

$$6 \cos(2x) = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

שוב נחפש נקודות בתחום, את ערכי ה-Y מחלצים על ידי הצבת ערכי ה-X בפונקציה המקורית:

$$k = 0, x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{4}, 3\right)$$

$$k = 1, x = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \left(\frac{3\pi}{4}, -3\right)$$

$$k = 2, x = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \left(\frac{5\pi}{4}, 3\right)$$

$$k = 3, x = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \left(\frac{7\pi}{4}, -3\right)$$

נאפיין על ידי הצבת ערכי ה-X בנגזרת השנייה:

$$y'' = -12 \sin(2x)$$

$$y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -12 < 0 \Rightarrow \max$$

$$y''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 12 > 0 \Rightarrow \min$$

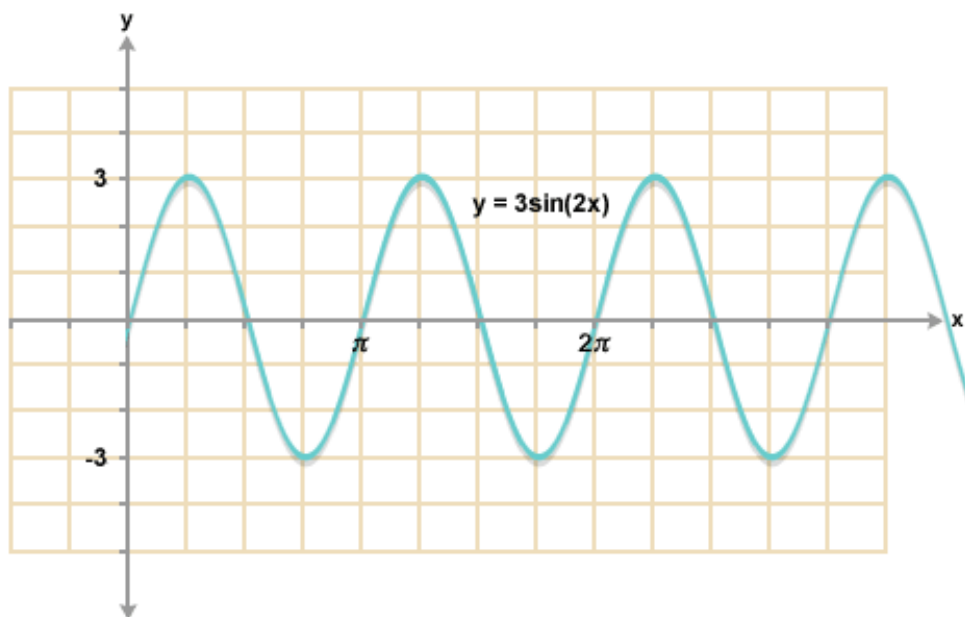
$$y''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -12 < 0 \Rightarrow \max$$

$$y''\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 12 > 0 \Rightarrow \min$$

הערה- יכולנו לדעת זאת בהתבסס על תחומי העלייה והירידה.

אסימפטוטות- אין אסימפטוטות אנכיות, מוגדרת בכל התחום.

שרטוט:



$$: y = \sqrt{5x^2 + 3} \quad 2.$$

תחום הגדרה -  $5x^2 + 3 \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

חיתוך עם הצירים-

$$y(x=0) = \sqrt{3} \Rightarrow (0, \sqrt{3})$$

$$y=0 = \sqrt{5x^2 + 3} \Rightarrow \emptyset$$

תחומי עלייה וירידה:

$$y' = \frac{10x}{2\sqrt{5x^2 + 3}} = \frac{5x}{\sqrt{5x^2 + 3}}$$

$$y' > 0 \Rightarrow 5x > 0 \Rightarrow x > 0$$

$$y' < 0 \Rightarrow 5x < 0 \Rightarrow x < 0$$

קיצון:

$$y' = 0$$

$$5x = 0$$

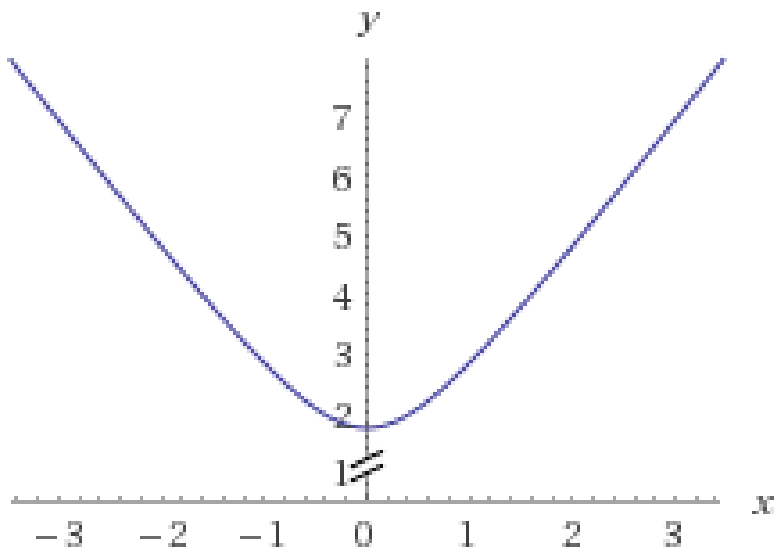
$$x = 0 \Rightarrow (0, \sqrt{3})$$

$$y'' = \frac{5\sqrt{5x^2 + 3} - \frac{5x}{\sqrt{5x^2 + 3}} \cdot 5x}{5x^2 + 3}$$

$$y''(x=0) = \frac{5\sqrt{3}}{3} > 0 \Rightarrow \min$$

אין אסימפטוטה אנכית, מוגדר בכל התחום.

שרטוט:



$$3. y = x \cdot e^x :$$

תחום הגדרה- לכל  $x$

נקודות חיתוך עם הצירים-

תחומי עלייה וירידה-

$$y(x=0) = 0 \Rightarrow (0,0)$$

$$y' = e^x + x e^x$$

$$y' > 0 \Rightarrow e^x(1+x) > 0 \Rightarrow x > -1$$

$$y' < 0 \Rightarrow e^x(1+x) < 0 \Rightarrow x < -1$$

נקודות קיצון:

$$y' = 0$$

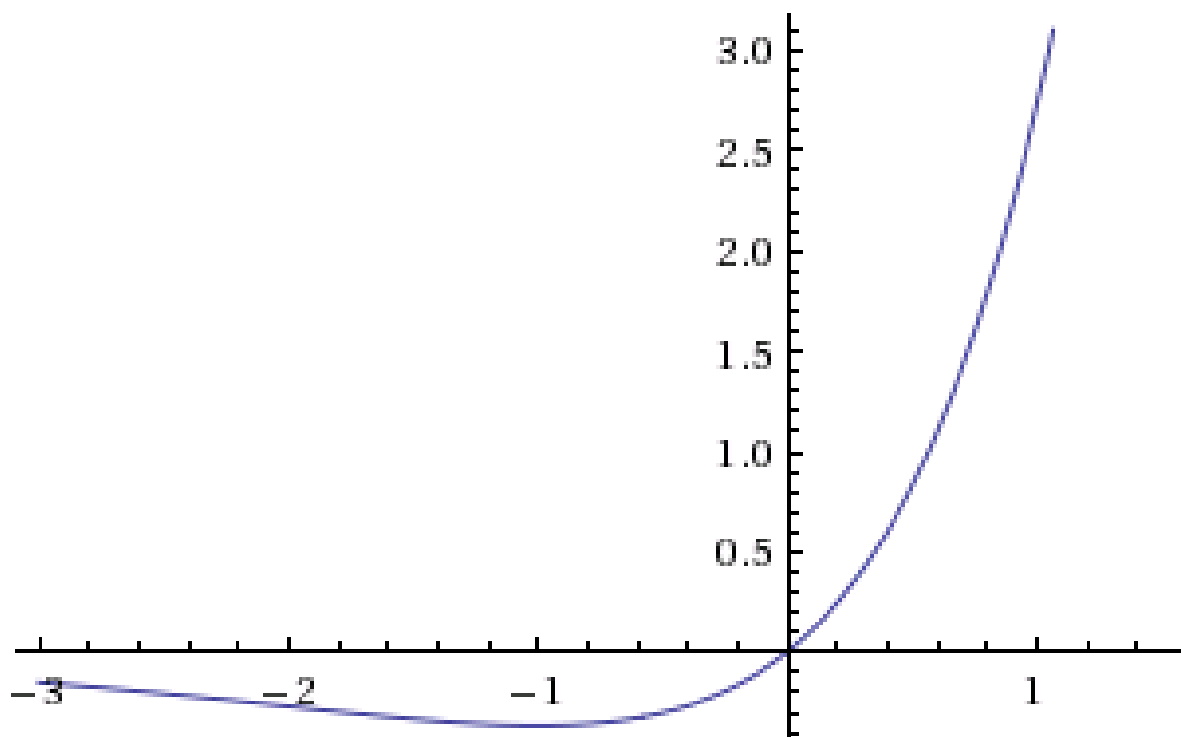
$$e^x(1+x) = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (-1, -e^{-1})$$

$$y'' = e^x + e^x(1+x) = e^x(2+x)$$

$$y''(-1) = e^{-1} > 0 \Rightarrow \min$$

אין אסימפטוטה אנכית, מוגדר בכל התחום.

שרטוט:



$$: y = \frac{x^2}{x^2 - 1} .4$$

תחום הגדרה-

$$x^2 - 1 \neq 0$$

$$x^2 \neq 1$$

$$x \neq \pm 1$$

$$y(x=0) = 0 \Rightarrow (0,0)$$

חיתוך עם הצירים-

תחומי עלייה וירידה-

$$y' = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y' > 0 \Rightarrow -2x > 0 \Rightarrow x < 0, x \neq -1$$

$$y' < 0 \Rightarrow -2x < 0 \Rightarrow x > 0, x \neq 1$$

נקודות קיצון:

$$y' = 0$$

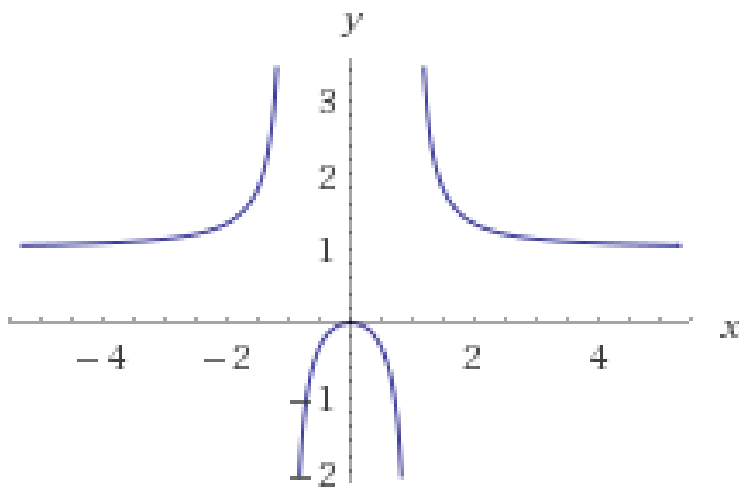
$$-2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

$$y'' = \frac{-2(x^2 - 1)^2 - 4x(x^2 - 1)(-2x)}{(x^2 - 1)^4}$$

$$y''(0) = -2 < 0 \Rightarrow \text{max}$$

אסימפטוטות:  $x = 1, x = -1$

שירטוט:



5.  $y = \ln x$

תחום הגדרה:  $x > 0$

חיתוך עם הצירים:

$$y(x = 0) \Rightarrow \emptyset$$

$$y = 0$$

$$0 = \ln x$$

$$e^0 = x$$

$$x = 1 \Rightarrow (1, 0)$$

תחומי עלייה וירידה:

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$y' > 0 \Rightarrow x > 0$$

$$y' < 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow \emptyset$$

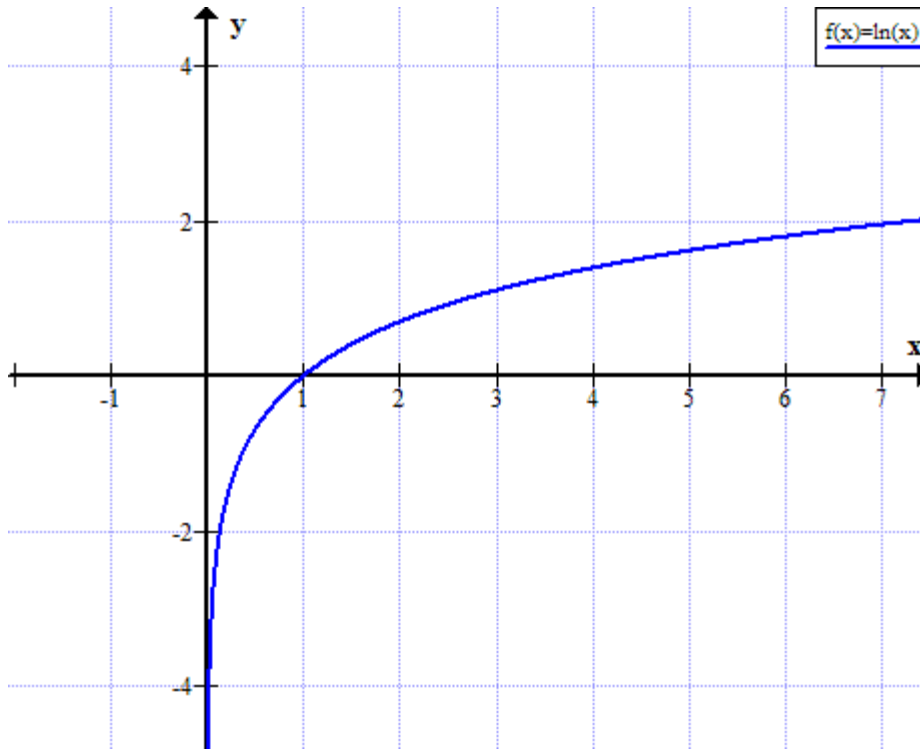
נקודות קיצון:

$$y' = 0$$

$$\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \emptyset$$

אסימפטוטות:  $x = 0$

שירטוט:



$$6. \quad y = \sin(x) \cdot e^x$$

תחום הגדרה נתון-  $0 \leq x \leq 2\pi$

חיתוך עם הצירים-

$$y(x=0) = 0 \Rightarrow (0,0)$$

$$y = 0 = \sin x \cdot e^x$$

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi k, k \in Z$$

נמצא את ה-k-ים עבורם X בתחום:

$$k = 0, x = 0 \Rightarrow (0,0)$$

$$k = 1, x = \pi \Rightarrow (\pi, 0)$$

$$k = 2, x = 2\pi \Rightarrow (2\pi, 0)$$

תחומי עלייה וירידה:

$$y' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$$

$$y' > 0 \Rightarrow \sin x + \cos x > 0 \quad | : \cos x$$

$$\tan x > -1 \Rightarrow$$

$$0 < x < \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$$

$$y' < 0$$

$$\tan x < -1 \Rightarrow$$

$$\frac{3\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$$

הערה: יכולנו לפתור לפי שרטוט של  $\sin x$  ושל  $-\cos x$  ולפתור כמו בשאלה 1.

נקודות קיצון:

$$y' = 0$$

$$\tan x = -1$$

$$x = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \left(\frac{3\pi}{4}, 7.46\right)$$

$$x = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \left(\frac{7\pi}{4}, -172.6\right)$$

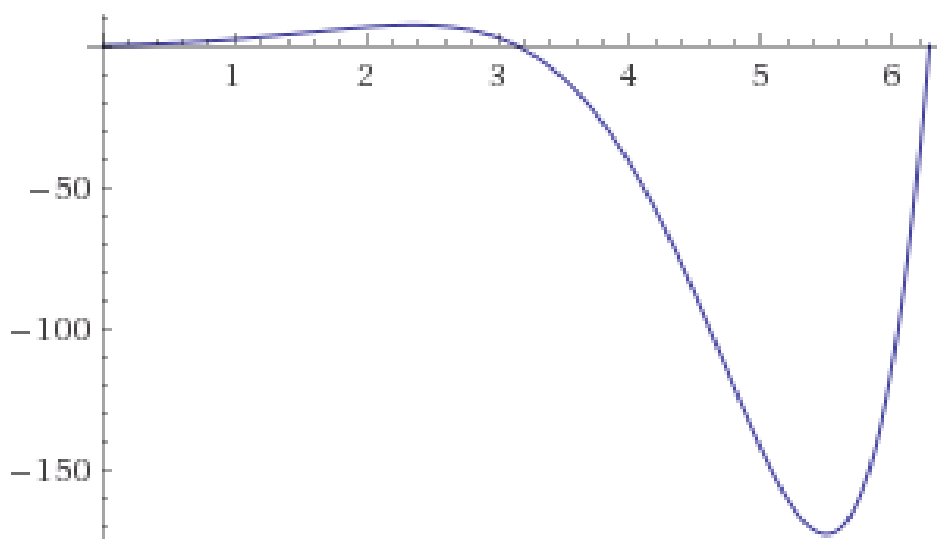
$$y'' = e^x (\sin x + \cos x) + e^x (-\sin x + \cos x) = e^x (2 \cos x)$$

$$y''(x = \frac{3\pi}{4}) = -14.9 < 0 \Rightarrow \max$$

$$y''(x = \frac{7\pi}{4}) = 345.2 > 0 \Rightarrow \min$$

אסימפטוטות: אין אסימפטוטות בתחום, מוגדר בכל התחום.

שרטוט:



7.  $y = e^{-x}$



תחום הגדרה- כל  $x$

חיתוך עם הצירים-

$$y(x=0)=1 \Rightarrow (0,1)$$

$$y=0 \Rightarrow \emptyset$$

תחומי עלייה וירידה:

$$y' = -e^{-x}$$

$$y' > 0 \Rightarrow -e^{-x} > 0 \Rightarrow \emptyset$$

$$y' < 0 \Rightarrow -e^{-x} < 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

נקודות קיצון:

$$y' = 0$$

$$-e^{-x} = 0 \Rightarrow \emptyset$$

אסימפטוטות: מוגדר לכל  $x$ , אין אסימפטוטות

שירטוט:

