

## פרק 4- מבוא לקינמטיקה (וקטורים) והשימוש בנגזרת

### גזירה של וקטורים

גזור את הווקטורים הבאים:

$$1. \frac{d\vec{F}}{dx} = (\cos x + 5 + \frac{1}{x})\hat{x} + (4x)\hat{y}$$

$$2. \frac{d\vec{F}}{dx} = (6x + \frac{2x}{\sqrt{1-(1+x^2)^2}})\hat{x} + (20(x \cdot e^x + e^x))\hat{y}$$

$$3. \frac{d\vec{F}}{dx} = (4x^3 - 3)\hat{x} + (\frac{-1}{2\sqrt{1-x}})\hat{y}$$

4. א. ניתן לראות כי על ציר ה-X יש מכפלה של אקספוננט וחזקה ממעלה שלישית, עבור זמנים ארוכים האקספוננט הוא הדומיננטי ולכן נקבל דעיכה. על ציר ה-Y, עבור זמנים ארוכים ה-ln ילך לכיוון האינסוף וה-sin יתרום תנודות, נקבל תנודות הולכות וגדלות.

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = (e^{-t}(-t^3 + 3t^2))\hat{x} + (\frac{\sin t}{t} + \ln t \cdot \cos t)\hat{y} \quad \text{ב.}$$

### קינמטיקה

1. (1) א.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = 8t + 5$$

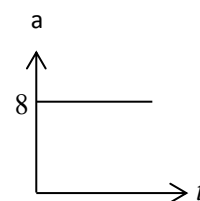
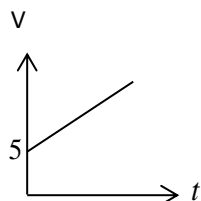
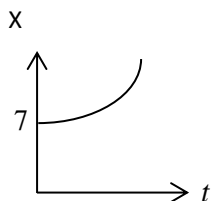
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = 8 \frac{m}{s^2}$$

$$x_0 = 7m$$

$$v_0 = 5 \frac{m}{s} \quad \text{ב.}$$

$$a_0 = 8 \frac{m}{s^2}$$

ג. יש להציב  $v(t=4)$ ,  $v(t=12)$ ,  $a(t=4)$ ,  $a(t=12)$



ד.

.א(2)

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = 5A \cos(5t + \beta)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = -25A \sin(5t + \beta)$$

.ב

$$x_0 = A \sin(\beta)$$

$$v_0 = 5A \cos(\beta)$$

$$a_0 = -25A \sin(\beta)$$

ג. יש להציב  $v(t=4), v(t=12), a(t=4), a(t=12)$

.א(3)

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -\alpha B \sin(\alpha t)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = -\alpha^2 B \cos(\alpha t)$$

.ב

$$x_0 = Bm$$

$$v_0 = 0$$

$$a_0 = -B\alpha^2$$

ג. יש להציב  $v(t=4), v(t=12), a(t=4), a(t=12)$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = 10t + 6$$

.א.2

$$v(t=5) = 56 \frac{m}{s}$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t=10) - x(t=0)}{10} = \frac{562 - 2}{10} = 56 \frac{m}{s}$$

.ב

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = 12t^2 - 10t + 6$$

.א.3

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = 24t - 10$$

$$v_0 = 6 \frac{m}{s}$$

.ב

$$a_0 = -10 \frac{m}{s^2}$$

ג. תנועה בתאוצה משתנה, תלויה בזמן.

$$v = v_0 + at$$

$$5 = 0 + 4a$$

.א. 4

$$a = \frac{5 \text{ m}}{4 \text{ s}^2}$$

$$v(t=1) = \frac{5}{4} \cdot 1 = \frac{5 \text{ m}}{4 \text{ s}}$$

.ב.

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

.ג.

$$x(t=2) = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{2} = 2.5 \text{ m}$$

$$10 = \frac{5}{4} t$$

.ד.

$$t = 8 \text{ s}$$

$$50 = \frac{5}{4} \frac{t^2}{2}$$

$$t^2 = 80$$

.ה.

$$t = \sqrt{80} \text{ s}$$

$$100 = \frac{5}{4} \frac{t^2}{2}$$

$$t = 12.46 \text{ s}$$

.ו.

$$v = \frac{5}{4} \cdot 12.46 = 15.81 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = 140 \frac{\text{km}}{\text{hr}} = \frac{140 \text{ m}}{3.6 \text{ s}} = 38.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$38.8 = at$$

$$x = 200 \text{ m} \Rightarrow 200 = \frac{at^2}{2} = \frac{38.8t}{2}$$

.א. 5

$$t = 10.26 \text{ s} \Rightarrow a = 3.78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

ב. חושב בסעיף א'.

$$v_0 = 180 \frac{\text{km}}{\text{hr}} = \frac{180 \text{ m}}{3.6 \text{ s}} = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_f = 0 = 50 + a \cdot 10$$

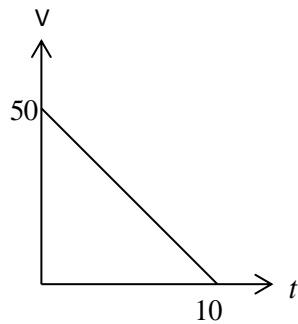
.א. 6

$$a = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$x = 50t - 5\frac{t^2}{2}$$

ב.

$$x(t = 10) = 500 - 250 = 250m$$



ג.

$$1) v_0 = 0, t_1 = 10s, a = 2\frac{m}{s^2}$$

$$2) t_2 = 20s, a = 0$$

$$3) t_3 = 5s, v_f = 0$$

7. 3 פרקי תנועה:

$$v = v_0 + at = 2 \cdot 10 = 20\frac{m}{s}$$

א.

$$0 = 20 + a \cdot 5$$

$$a = -4\frac{m}{s^2}$$

ב.

$$x = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$$

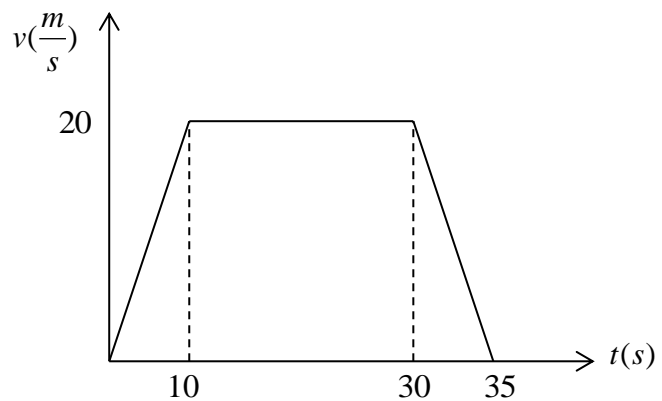
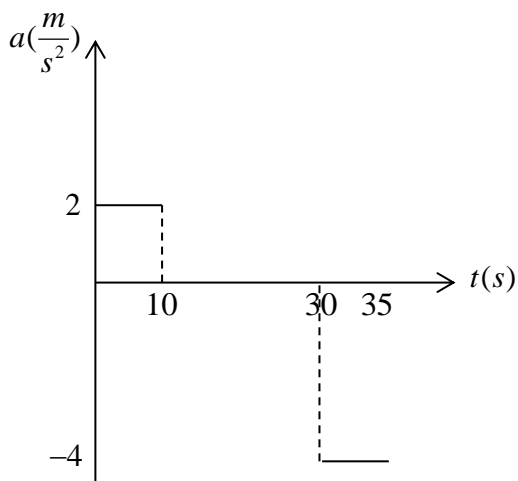
$$\Delta x_1 = \frac{2 \cdot 10^2}{2} = 100m$$

$$\Delta x_3 = 20 \cdot 5 - \frac{4 \cdot 5^2}{2} = 50m$$

$$\Delta x_2 = vt = 20 \cdot 20 = 400m$$

$$\Delta x_T = 550m$$

ג.



ד+ה.

.א.8

$$v = 90 \frac{km}{hr} = 25 \frac{m}{s}$$

$$t_1 = 0.8s$$

$$x_1 = v \cdot t_1 = 25 \cdot 0.8 = 20m$$

$$v_{2,0} = 25 \frac{m}{s}$$

$$v_f = 0$$

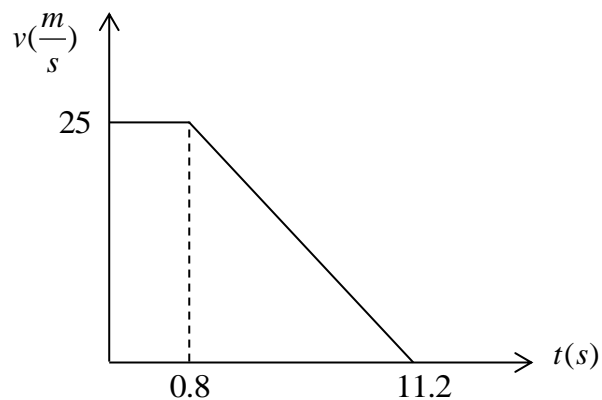
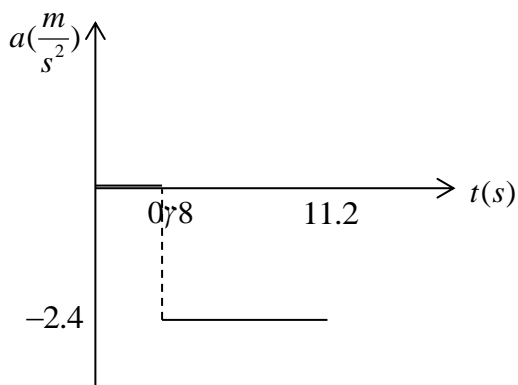
$$x_2 = 130m = 25t + \frac{at^2}{2}, 0 = 25 + at$$

$$130 = 25t - 12.5t = 12.5t$$

$$t = 10.4s \Rightarrow a = -2.4 \frac{m}{s^2}$$

ב. נמצא בסעיף א.

.ד+ג



$$v_0 = 60 \frac{km}{hr} = 16.6 \frac{m}{s}$$

$$a = -1800 \frac{km}{hr^2} = -1800 \frac{1000}{3600^2} \frac{m}{s^2} = -\frac{5}{36} \frac{m}{s^2}$$

$$10_{\min}, 30_{\min} \Rightarrow v = const$$

$$x(t = 10_{\min} = 600s) = v \cdot t = 16.6 \cdot 600 = 10,000m = 10km$$

$$x(t = 30_{\min} = 1800s) = v \cdot t = 16.6 \cdot 1800 = 30,000m = 30km$$

$$x(t = 31_{\min} = 1860s) = x(30_{\min}) + x(1_{\min}, a) = 30km + 16.6 \cdot 60 - \frac{5}{36} \cdot \frac{60^2}{2} =$$

$$30km + 1000m - 250m = 30.75km$$

.א.9

$$v_f = 0$$

$$0 = 16.66 - \frac{5}{36} \frac{t^2}{2} \Rightarrow t = 120s$$

$$x = 16.66 \cdot 120 - \frac{5}{36} \frac{(120)^2}{2} = 1000m$$

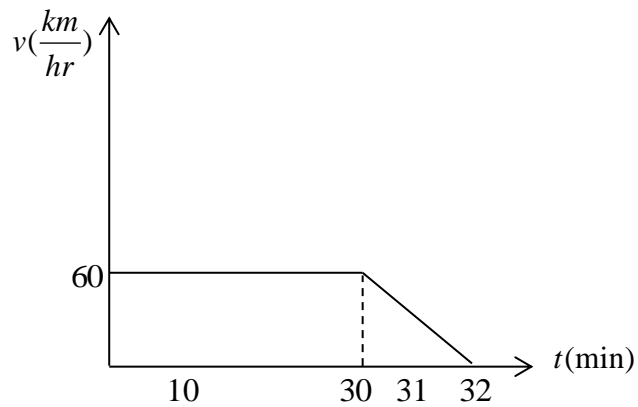
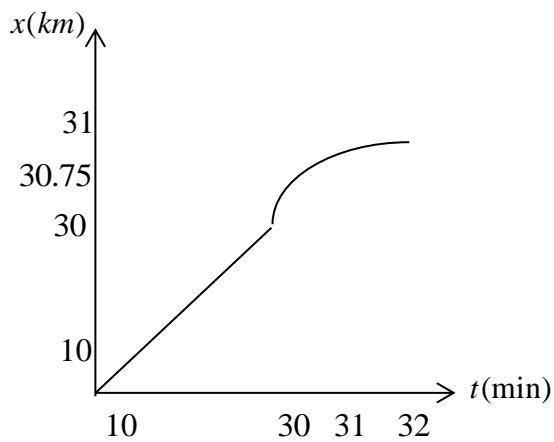
$$x_T = 31km$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{31km}{32 \text{ min}} = \frac{31,000m}{1920s} = 16.14 \frac{m}{s} = 58.125 \frac{km}{hr}$$

ב. נמצא את זמן הבלימה:

ג.

ד.



$$y = y_0 + v_0 t - g \frac{t^2}{2}$$

$$y(t=1) = 2 + 19.6 - \frac{9.8}{2} = 16.7m$$

$$v(t=1) = 19.6 - 9.8 \cdot 1 = 9.8m$$

$$v = 0 = 19.6 - 9.8t$$

$$t = 2s$$

$$y(t=2) = y_{\max} = 2 + 19.6 \cdot 2 - 9.8 \frac{2^2}{2} = 21.6m$$

$$y_0 = 21.6m, y_f = 2m$$

$$2 = 21.6 - g \frac{t^2}{2} \Rightarrow t = 2s$$

$$t_T = 4s$$

א. 10

ב. בשיא הגובה- המהירות מתאפסת-

ג.

$$y_0 = 21.6m, y_f = 0, v_0 = 0$$

$$0 = 21.6 - g \frac{t^2}{2} \Rightarrow t = 2.01s$$

ד. נמצא את הזמן משיא הגובה עד לקרקע-

$$v = -gt = -9.8 \cdot 2.01 = -20.6 \frac{m}{s}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = (e^t(\cos t - \sin t) + 3)\hat{x} - 2At\hat{y} \quad .11$$

שינוי המהירות בזמן הוא התאוצה- כמה מהירות נוספת או פוחתת בכל יחידת זמן. אם נתבונן בווקטור המהירות- על ציר X האיבר שדומיננטי בזמנים ארוכים הוא האקספוננט ולכן יחד עם ה-cos נקבל תנודות הולכות וגדלות, ועל ציר ה-Y התקדמות שהולכת וגדלה לכיוון השלילי.

12. א. תנודות הולכות וגדלות על ציר ה-X והתקדמות בקצב קבוע על ציר ה-Y

$$\vec{v} = (e^t(\sin t + \cos t))\hat{x} + \hat{y} \quad .ב$$

$$\vec{a} = (e^t(\sin t + \cos t + \cos t - \sin t))\hat{x} = (2e^t \cos t)\hat{x}$$

$$v = 0 \quad .13 א.$$

$$v_0 = 40 \frac{m}{s}, v_f = 0$$

$$0 = 40 - gt \Rightarrow t = 4.08s \quad .ב$$

$$y = 40 \cdot 4.08 - g \frac{(4.08)^2}{2} = 81.69m$$

$$y_0 = 81.69m, y_f = 0, v_0 = 0$$

$$0 = 81.69 - g \frac{t^2}{2} \Rightarrow t = 4.08s \quad .ג$$

$$t_T = 8.16s$$

14. נחלק לשני חלקים של תנועה- מחוץ לאגם ובתוך האגם, בחוץ-נפילה חופשית, בפנים מהירות קבועה, כאשר קבענו את ה-0 בגובה פני המים.

$$y_0 = 3m, y_f = 0$$

$$0 = 3 - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t_1 = 0.78s \quad \text{חלק ראשון:}$$

$$v_f = -gt_1 = -7.66 \frac{m}{s}$$

$$y_0 = 0, v = -7.66 \frac{m}{s}, t_2 = 4s$$

חלק שני:

$$y = vt_2 = -7.66 \cdot 4 = -30.67m$$

15. שוב נחלק ל-2 חלקים- בקנה ומחוץ לו, כאשר ה-0 נקבע בקצה הקנה:

$$v_0 = 0, a = 4000 \frac{m}{s^2}, y_0 = -0.8m, y_f = 0$$

$$0 = -0.8 + \frac{4000t^2}{2} \Rightarrow t = 0.02s$$

חלק ראשון:

$$v_f = 4000 \cdot 0.02 = 80 \frac{m}{s}$$

$$v_0 = 80 \frac{m}{s}, v_f = 0, y_0 = 0$$

$$0 = 80 - gt \Rightarrow t = 8.16s$$

חלק שני:

$$y = 80 \cdot 8.16 - \frac{9.8(8.16)^2}{2} = 326.8m$$

16. נחשב תחילה את הזמן שלוקח לו לעבור את הדרך עם העבודות, לאחר מכן בהנחה שלא היו העבודות ולבסוף את ההפרש בין הזמנים.

$$1) v_0 = 90 \frac{km}{hr} = 25 \frac{m}{s}, a = -2 \frac{m}{s^2}, v_f = 45 \frac{km}{hr} = 12.5 \frac{m}{s}$$

$$12.5 = 25 - 2t_1 \Rightarrow t_1 = 6.25s$$

$$2) v = 12.5 \frac{m}{s}, \Delta x = 5km = 5000m$$

עם העבודות- נחלק ל-3 מקטעי תנועה:

$$5000 = 12.5t_2 \Rightarrow t_2 = 400s$$

$$3) v_0 = 12.5 \frac{m}{s}, v_f = 25 \frac{m}{s}, a = 2 \frac{m}{s^2} \Rightarrow t_1 = t_3 = 6.25s$$

$$t_T = 412.5s$$

ללא העבודות: נצטרך לשם כך לדעת את המרחק שעבר בזמן התאוצה והתאוצה, מרחקים שווים מטעמי סימטריה-

$$x_1 = 25 \cdot 6.25 - \frac{2(6.25)^2}{2} = 117.18m = x_3$$

$$x_T = 2(117.18) + 5000 = 5234.375m$$

$$x = vt \Rightarrow t = \frac{5234.375}{25} = 209.375s$$

$$\Delta t = 412.5 - 209.375 = 203.125s$$