פרק 4- מבוא לקינמטיקה (וקטורים) והשימוש בנגזרת

4.1 מבוא:

פירוש המילה קינמטיקה הוא "תיאור התנועה". קינמטיקה כחלק ממדע הפיזיקה שואפת לתאר תנועה, באופן מדויק בעזרת נוחסאות, קשרים מתמטיים ומספרים.
על מנת לתאר תנועה במלואה עלינו להכיר כלי חשוב נוסף- **וקטורים**.

*הערה: בלימודי התואר תלמדו לעבוד במערכות צירים בעלות שלושה ממדים, במסגרת מכינה זו נסתפק במערכות דו ממדיות.

הגדרות:

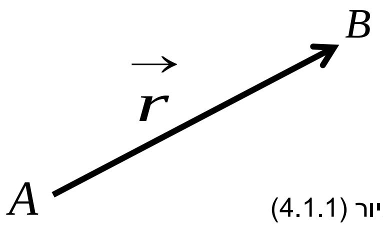
סקלר- סקלר הוא גודל פיזיקלי שאפשר לתארו על ידי מספר אחד ללא תלות במערכת צירים. למשל- מסה, מסת הגוף אינה תלויה במיקומו של הגוף או במהירותו או בכיוון תנועתו.

וקטור- וקטור הוא מבנה פיזיקלי המתואר על ידי אוסף של קורדינאטות (מספר הקורדינאטות כמספר המימדים) ויש לו תכונות הדומות לתכונות של חץ, אורך החץ מתאר את גודל הוקטור וכיוונו את כיוון הוקטור.

סימונים מקובלים:

סימון וקטור- A , $\vec{A}$.

סימון גודל וקטור (אורך החץ)- $|A|$, $|\vec{A}|$



איור (4.1.1)

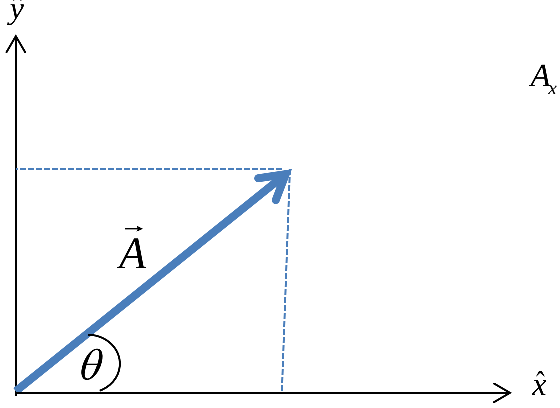
למשל, באיור 4.1.1 וקטור ההעתק מהנקודה A לנקודה B יהיה $\vec{r}$ וגודלו $|\vec{r}|$.

תכונות הוקטור:

1. לוקטור יש גודל וכיוון.

2. לוקטור לא מוגדרת נקודת התחלה ולכן הזזת הוקטור אינה משנה אותו. שני וקטורים הם זהים אם הם בעלי אותו גודל ואותו כיוון, אפילו אם מתחילים בנקודות שונות.

3. אפשר לייצג אותו על ידי היטליו על כיווני הצירים של מערכת הקורדינאטות.



למשל, באיור 4.1.2 רכיב ה-X של הוקטור $\vec{A}$ הוא $A_x = |A|\cos\theta$

ורכיב ה-Y הוא $A_y = |A|\sin\theta$.

כעת נוכל לייצג את הוקטור בשתי צורות:

$$\vec{A} = (|A|\cos\theta, |A|\sin\theta)$$

$$\vec{A} = |A|\cos\theta\hat{x} + |A|\sin\theta\hat{y}$$

איור (4.1.2)

וקטור היחידה (וקטור כיוון): וקטור יחידה הוא וקטור שאורכו יחידה, המכוון בכיוון רצוי כלשהו. וקטור כיוון מסומן בכובע מעל אות הווקטור. וקטור יחידה מתקבל על ידי חלוקת הווקטור בגודלו.

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|A|}$$

חישוב אורך וקטור: אורך וקטור מחושב על ידי משפט פיתגורס בצורה הבאה: $|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$.

***העשרה**- גזירה של וקטור:*

וקטור שנכתב בצורה הבאה: $\vec{F}(t) = F_x(t)\hat{x} + F_y(t)\hat{y}$

נגזור בצורה הבאה: $\frac{d\vec{F}}{dt} = \hat{x}\frac{dF_x}{dt} + \hat{y}\frac{dF_y}{dt}$

כלומר, הנגזרת של וקטור היא סכום נגזרות הרכיבים שלו.

דוגמא: אם $\vec{F} = 3t\hat{x} + 2t^2\hat{y}$ אז $\frac{d\vec{F}}{dt} = 3\hat{x} + 4t\hat{y}$.

*הערה: במסגרת תרגול הקינמטיקה אנו נעבוד עם גדלים סקלרים, אך חשוב להכיר את צורת הגזירה הזו כיוון שתיתקלו בה בלימודי המכניקה.

כעת נוכל להיזכר במספר גדלים ומושגים שנלמדו בתיכון במסגרת לימודי המכניקה, אך ננסה לנתח אותם בעזרת הכלים שזה עתה למדנו:

1. **וקטור המיקום\ההעתק**, מסומן ב- $\vec{r}$, מתאר את מקום הגוף ביחס לראשית הצירים. מתנהג כחץ מראשית הצירים ועד לגוף. ההעתק $\Delta\vec{r}$ מתאר את שינוי מיקום הגוף כתלות בזמן תחילת התנועה וסיומה, $\Delta\vec{r}=\vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1)$. חשוב לשים לב להבדל בין העתק לאורך הדרך- ההעתק הוא וקטור המכוון מנקודת ההתחלה לסיום ולעומת זאת אורך הדרך הוא סקלר חסר כיוון.

2. **וקטור המהירות**, מסומן ב- $\vec{v}$, מתאר את קצב שינוי המקום- שינוי המקום ליחידת זמן .

3. **וקטור התאוצה**, מסומן ב- $\vec{a}$, מתאר את קצב שינוי המהירות- שינוי המהירות ביחידת זמן.

4.2 סוגי תנועה:

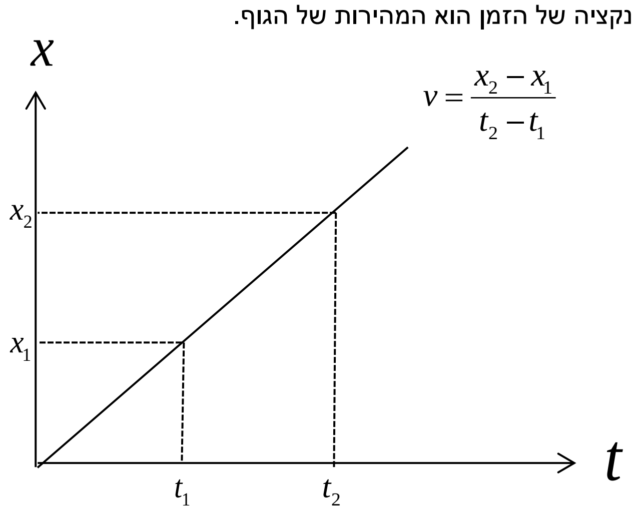
1. **תנועה במהירות קבועה:**

גוף נע במהירות קבועה כאשר הוא עובר מרחקים שווים בזמנים שווים ולכן ההעתק של הגוף בכל שניה הוא קבוע.
במקרה זה הקשרים הבאים מתקיימים:

$$x(t)=v_0t+x_0 \qquad\qquad v(t)=v_0=const$$

זוהי משוואת קו ישר מהצורה: $y=m\cdot x+n$ כאשר m הוא שיפוע הקו ו-n הוא נקודת החיתוך עם ציר ה-y. כאשר הגדרנו מהי נגזרת, הגדרנו שנגזרת היא גם שיפוע הפונקציה בנקודה, נוכל להסיק מכך 2 מסקנות:

1. שיפוע הגרף של המיקום כפונקציה של הזמן הוא המהירות של הגוף.



2. המהירות היא נגזרת וקטור ההעתק לפי הזמן:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dr_x}{dt}\hat{x}+\frac{dr_y}{dt}\hat{y} \qquad\qquad v=\dot{x}$$

שאלה: חישבו, כיצד יראה הגרף של המהירות כפונקציה של הזמן?

2. **תנועה שוות תאוצה:**

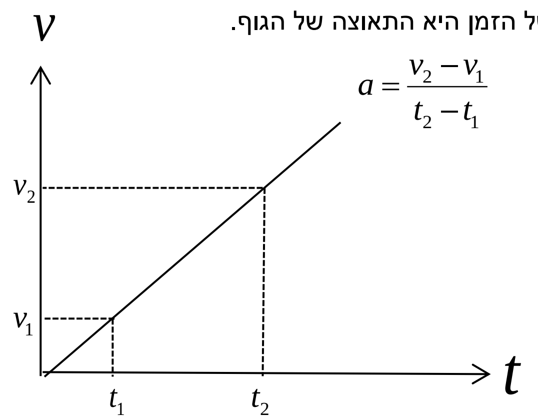
בתנועה שוות תאוצה, שינוי המהירות הוא קבוע, כלומר- בכל רגע ורגע נוספת או פוחתת לגוף מהירות בכמות קבועה.
למשל- בכל שניה נוספת למהירותו של גוף 2 קמ"ש.

במקרה זה מתקיימים הקשרים הבאים:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad v(t) = v_0 + a \bullet t \qquad a(t) = a_0 = const$$

משוואת המהירות היא משוואת קו ישר, כמו משוואת ההעתק עבור תנועה שוות מהירות. מכאן נוכל להסיק את המסקנות הבאות:

1. שיפוע הגרף של המהירות כפונקציה של הזמן היא התאוצה של הגוף.



2. התאוצה היא נגזרת וקטור המהירות ונגזרת שניה של ההעתק $a(t) = \dot{v} = \ddot{x}$ $\qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

כלומר, אם נגזור את הקשר $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ לפי הזמן נקבל את המשוואה למהירות בתנועה שוות תאוצה- $v(t) = v_0 + a \bullet t$. ואם נגזור אותה לפי הזמן, נקבל את הקשר $a(t) = a_0 = const$.
בהמשך נראה שניתן לבצע גם את המעבר ההפוך ע"י אינטגרציה.

שאלה: חישבו, כיצד יראה הגרף של ההעתק כפונקציה של הזמן?