פרק 5- פיתוח פונקציה לטור

5.1 מה זה טור?

במתמטיקה מושג הטור בא לציין סכום של סידרת מספרים או סידרה של פונקציות. למשל 1+3+5+7 הוא טור שסכומו 16. ישנם טורים\סדרות סופיים וישנם טורים אינסופיים.

אנו נלמד על טור טיילור, זהו טור המאפשר לחשב פונקציה על פי התנהגות הפונקציה בנקודה מסוימת. נסביר על ידי דוגמה מעולם הקינמטיקה שזה עתה למדנו:
נניח שידועה לנו פונקציה $x(t)$ המתארת את מיקום הגוף כפונקציה של הזמן ואנו מעוניינים בתנועת הגוף המדויקת ביותר בזמן t_0 כלשהו, כלומר- בכל המידע שניתן להשיג על תנועת הגוף ברגע זה.
אם הגוף נמצא במנוחה אז המיקום הוא כל הידע הדרוש לנו: $x(t)=x(t_0)$
אך אם הגוף בתנועה מסובכת הכוללת מהירות ותאוצה שאינה בהכרח קבועה?
אז, כפי שלמדנו, נגזור את פונקציית ההעתק, כעת אנו יודעים את מיקום הגוף וגם את מהירותו, שהיא הנגזרת הראשונה של פונקציית המיקום $x'(t_0)=v(t_0)$.
כלומר, המידע שלנו מדויק יותר- זה נקרא קירוב או תיקון. אנו קרובים יותר לערך פונקציית המיקום המדויק.

$$x(t)=x(t_0)+v(t_0)$$

אם נמשיך ונגזור את הפונקציה שוב ושוב (עד ∞) נקבל על הפונקציה את המידע המלא והמדויק ביותר, הקירוב השני יספק מידע על התאוצה וכך הלאה...

5.2 טור טיילור

טור טיילור הוא טור חזקות ופיתוחו מתקבל על ידי גזירת הפונקציה מספר פעמים (כמספר הקירוב\התיקון בו אנו מעוניינים) והצבת הנגזרות בנוסחה הבאה:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)\bullet(x-x_0)^2+\frac{1}{6}f'''(x_0)\cdot(x-x_0)^3+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n+\ldots$$

לשם הפשטות אנו נשתמש בטור מקלורן שהוא מקרה מיוחד של טור טיילור, בו מפתחים סביב $x_0=0$:

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{1}{2}f''(0)\cdot x^2+\frac{1}{6}f'''(0)\cdot x^3+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\cdot x^n+\ldots$$

נסתכל על $f(x)=e^x$, כל הנגזרות שלה הן e^x וכאשר נציב x=0 הן 1, לכן טור מקלורן יהיה:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots$$

מספר דגשים עליהם תרחיבו במהלך הסימסטר:
בכדי לפתח פונקציה לטור עליה להיות גזירה ∞ פעמים, מוגדרת ב- x_0 , על הנגזרות להיות מוגדרות ב- x_0 ועליה להיות רציפה.

שני פיתוחים שימושיים נוספים:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots \qquad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

מה יקרה אם נציב בטור של cosx, $x=\frac{\pi}{2}$ או $x=\frac{\pi}{4}$?

תרגול:

פתחו לטור מקלורן את הפונקציות הבאות, עד לאיבר הרביעי:

1. $f(x)=\tan x$
2. $f(x)=e^{-x}$
3. $f(x)=\sqrt{1+x}$
4. $f(x)=\ln(1+x)$
5. $f(x)=\ln(\frac{1+x}{1-x})$
6. $f(x)=\frac{1}{1-x}$