פרק 6- האינטגרל

6.1 מבוא

האינטגרל הוא הפעולה ההפוכה לפעולה הגזירה. האינטגרל מאפשר לנו למצוא את הפונקציה הקדומה של הפונקציה עליה אנו מבצעים את הפעולה, כלומר, אם נגזור את הפונקציה הקדומה אנו אמורים לקבל את הפונקציה עליה ביצענו אינטגרציה.

למשל: הפונקציה הקדומה של $f(x)=3x^2$ היא (באופן אינטואיטיבי) $F(x)=x^3$.

6.2 האינטגרל הלא מסוים

הגדרה- אם ל- $f(x)$ קיימת פונקציה קדומה $F(x)$ אז אוסף כל הפונקציות הקדומות $F(x)+c$ נקרא האינטגרל הלא מסוים של $f(x)$ ונסמן אותו ע"י :

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

הסימון dx מסמן את העובדה שמשתנה האינטגרציה (המשתנה התלוי איתו אנו עובדים) הוא X.
את הקבוע C מוסיפים כיוון שכאשר נגזור את הפונקציה הקדומה הוא "ייפול", כלומר, יכולים להיות אינסוף קבועים שייצרו אינסוף פונקציות קדומות אשר מתאימות לפונקציה עליה ביצענו את האינטגרציה.

למשל: לפונקציה $f(x)=3x^2$ יכולות להתאים גם הפונקציות הקדומות $F(x)=x^3+2$ או $F(x)=x^3+1000$.

תכונות:

1. אם $f(x)$ גזירה אז $\int f'(x)dx=f(x)+c$
2. ניתן להוציא קבועים אל מחוץ לסימן האינטגרל: $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$
3. האינטגרל של הסכום או ההפרש של פונקציות שווה לסכום או ההפרש של האינטגרלים:

$$\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$$

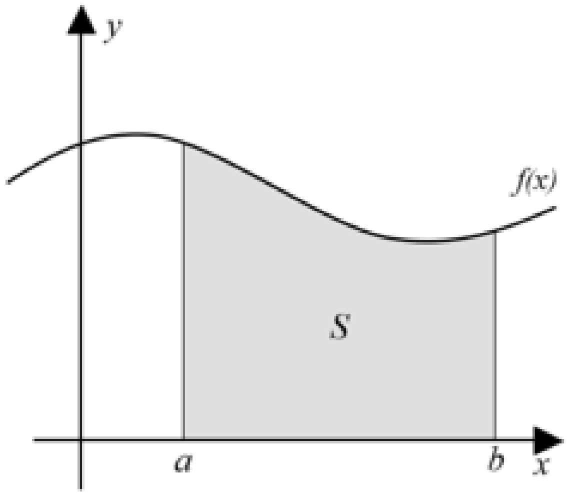
אינטגרלים מידיים:

זהו אוסף של אינטגרלים שאנו יכולים לפתור מתוך היכרות עם הנגזרות של הפונקציות הקדומות.

$$1.\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$$
$$2.\int \sin x dx=-\cos x+c$$
$$3.\int \cos x dx=\sin x+c$$
$$4.\int \tan x dx=-\ln\cos x+c$$
$$5.\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+c$$
$$6.\int x^{-1}dx=\ln x+c$$
$$7.\int e^x dx=e^x+c$$
$$8.\int \cot dx=\ln\sin x+c$$
$$9.\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c$$

6.3 האינטגרל המסוים

האינטגרל המסוים עבור פונקציה חיובית $f(x)$ המוגדרת בקטע סופי (a,b) הוא מספר השווה לשטח הכלוא בין ציר ה- X לגרף הפונקציה, בין קצות הקטע.



עבור פונקציה חיובית $f(x)$, האינטגרל המסוים $\int_a^b f(x)dx$ הוא השטח S הכלוא מתחת לגרף.

a,b נקראים גבולות האינטגרציה.

ובאופן כללי:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

דוגמא: מהו השטח הכלוא מתחת לפרבולה $y = x^2$ בתחום $0 \le x \le 2$?

$$\int_0^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3} \qquad s = \frac{8}{3}$$

6.4 השימוש בפעולת האינטגרל בקינמטיקה:

כעת כשאנו יודעים לבצע את פעולת האינטגרציה על פונקציה נוכל ליישם אותה בכדי לנתח תנועה של גוף באופן רחב יותר.

בפרק הקודם למדנו שהתאוצה היא נגזרת של המהירות והמהירות היא נגזרת של ההעתק. כלומר, המהירות היא הפונקציה הקדומה של התאוצה וההעתק הוא הפונקציה הקדומה של המהירות.

זאת אומרת שאם ידועה לנו רק תאוצתו של גוף אנו יכולים על ידי פעולה מתמטית פשוטה לדעת את מהירותו ואת אופי תנועתו.

למשל, אם נתונה מהירות של גוף כלשהו- $v(t)$ נוכל לחלץ ביטוי להעתק על ידי:

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = x(t_2) - x(t_1)$$ מכאן ש- $$x(t_2) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

ואם נתונה תאוצתו $a(t)$ נוכל לחלץ ביטויים למהירותו ולאחר מכן להעתקו, על ידי:

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = v(t_2) - v(t_1)$$ מכאן ש- $$v(t_2) = v(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt \quad , \quad x(t_2) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

נשים לב שאם נבחר את $t_1 = 0$ אז נחזור ונקבל את הנוסחאות והקשרים המוכרים לנו מלימודי התיכון.

***הערה**- אינטגרציה על וקטור:

אינטגרציה היא פעולה הפוכה לפעולת הגזירה, לכן אם גוזרים וקטור לפי רכיבים, גם אינטגרציה מבצעים בנפרד, לפי רכיבים.

$$\int \vec{F}dt = \hat{x}\int F_x dt + \hat{y}\int F_y dt$$

דוגמא: $$\int (3\hat{x} + 4t\hat{y})dt = 3t\hat{x} + 2t^2\hat{y} + \vec{C}$$

מאחר שהאינטגרציה אינה מסוימת מוסיפים וקטור קבוע כלשהו שאינו ידוע.