

פרק 6- האינטגרל

האינטגרל הלא מסוים:

$$1. \int (3x^2 + 6x - 2) dx$$

$$2. \int x(x+2) dx$$

$$3. \int (2 + 3x^3)^2 dx$$

$$4. \int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}}$$

$$5. \int \frac{dx}{x^2 + 8}$$

$$6. \int (e^{3x} - e^{2x})^2 dx$$

$$7. \int (1 + \sqrt[3]{x^2})^2 dx$$

$$8. \int \cos^2 x dx$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$10. \int \tan(10x+5) dx$$

$$11. \int \left(\frac{2\sqrt{x} + 3x^2}{x} \right) dx$$

$$12. \int (3x-5)^{12} dx$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$14. \int \sin(3x-1) dx$$

$$15. \int \sqrt{7x+4} dx$$

האינטגרל המסוים:

$$1. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$2. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$3. \int_{-1}^2 e^{-x} dx$$

$$4. \int_0^{2\pi} \sin x dx$$

$$5. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$$

$$6. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$$

$$7. \int_0^1 e^{2x} dx$$

$$8. \int_0^2 (2-x^5) dx$$

$$9. \int_0^2 3 \cos(4x) dx$$

$$10. \int_1^2 \frac{e^x - 5x}{3} dx$$

$$11. \int_0^1 \sqrt{5x+4} dx$$

$$12. \int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$13. \int_{-1}^3 (3x^2 - 2x + 1) dx$$

$$14. \int_4^5 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - x \right) dx$$

שאלות אתגר:

15. עבור איזה ערך של x לאינטגרל $\int_x^{x+3} t(5-t) dt$ יש ערך מקסימלי?

$$H(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$H(1) = ?$$

$$H'(1) = ? \quad .16$$

השימוש באינטגרל בקינמטיקה:

1. לכל אחד מהביטויים למהירותו של גוף, בהנחה שהגוף התחיל תנועתו מראשית הצירים:

$$(1) v = 6t + 5$$

$$(2) v = 5 \sin(8t)$$

א. מהו הביטוי הכללי של $x(t)$ ושל $a(t)$?

ב. מהו הערך של x_0, v_0, a_0 ?

ג. מצא את מיקום ותאוצת הגוף לאחר 5, 12 ו-18.5 שניות.

ד. כיצד נראים הגרפים של המיקום, המהירות והתאוצה כפונקציה של הזמן?

2. לכל אחד מהביטויים ותאוצתו של גוף, בהנחה שהגוף התחיל את תנועתו בראשית הצירים ממנוחה:

$$(1) a = 2$$

$$(2) a = 0$$

$$(3) a = \cos(3t)$$

א. מהו הביטוי הכללי של $x(t)$ ושל $v(t)$?

ב. מהו הערך של x_0, v_0, a_0 ?

ג. מצא את מהירות ומיקום הגוף לאחר 2, 7 ו-20 שניות.

ד. כיצד נראים הגרפים של המיקום, המהירות והתאוצה כפונקציה של הזמן?

3. אם מהירותו של גוף (הנמדדת ב- m/sec) נתונה בביטוי: $v = 5t + 2$

א. מהו ההעתק של הגוף ב-5 השניות הראשונות של התנועה?

ב. מהי המהירות הממוצעת ב-10 השניות הראשונות של התנועה?

4. מכונית מתחילה את תנועתה במקום $x_0 = 15m$ במהירות התחלתית $v_0 = 10m/s$. המכונית נעה בתאוצה

ההולכת וגדלה: $a = 3 + 5t$. מצאו את מהירות המכונית ואת מקומה כפונקציה של הזמן.

5. מכונית מתחילה לבלום בזמן $t = 0$ כשמהירותה $30m/sec$. תאוצת המכונית במהלך הבלימה תלויה בזמן,

$a = -12t \frac{m}{sec^2}$. מצאו את מרחק הבלימה של המכונית מתחילת הבלימה ועד לעצירתה המוחלטת.

אינטגרציה על וקטורים:

1. נתון וקטור מהירות התלוי בזמן, $\vec{v}(t) = 2t\hat{x} + 5t^2\hat{y} + 3t^3\hat{z}$, מצאו את וקטור היחידה המתאים ואת וקטור ההעתק.

2. דג שוחה בים. מיקומו ההתחלתי $\vec{r}(0) = 5\hat{y} + 7\hat{z}$ ומהירותו נתונה בביטוי $\vec{v}(t) = 6\hat{x} + 3t\hat{y} - 10t^2\hat{z}$, מהו מיקומו בזמן t ?

3. נניח כי תאוצת גוף נתונה בביטוי $\vec{a}(t) = -2e^{-t}\hat{x}$, מהירותו ההתחלתית $\vec{v}(0) = 10\hat{x} - 7\hat{y}$ ומיקומו בזמן $t_1 = 1s$ הוא $\vec{r}(t = 1s) = 5\hat{y} + 3\hat{z}$. מצאו את מיקומו ואת מהירותו בכל זמן בעזרת אינטגרליים.

4. אם מנדנדת עגלת תינוק תוך כדי תנועה כדי להרדימו, תאוצת העגלה נתונה בביטוי $a = 50 \sin(5t + \pi)$, מיקום

העגלה ב- $t = 0$ הוא $x(0) = 1.23m$ ומהירותה $v = 2.5 \frac{m}{s}$, מצאו את מהירות העגלה ואת מיקומה בכל רגע.