פרק 8- משוואות דיפרנציאליות

משוואות מסדר ראשון:

נסו לפתור את המשוואות הדיפרנציאליות הבאות

$$1.\, y = e^{-x} \Rightarrow y' = -e^{-x} = -y$$

$$2.\, y = c \cdot x, c = const$$

$$y' = c \Rightarrow y = y' \cdot x$$

משוואות מסדר שני:

נסו לפתור את המשוואות הבאות

$$1.\, y = Ae^{x} + Be^{-x}$$

$$y' = Ae^{x} - Be^{-x}$$

$$y'' = Ae^{x} + Be^{-x} = y$$

$$2.\, y = A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

$$y' = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$$

$$y'' = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) = -4y$$

הפרדת משתנים:

פתרו את המשוואות הבאות בשיטת הפרדת משתנים. שימו לב- ייתכן ותקבלו פתרון בו לא ניתן\קשה לבודד את Y, במקרה כזה השאירו את הפתרון כמשוואה סתומה. בנוסף, אם נתון תנאי התחלה עליכם למצוא פתרון כללי ופרטי.

$$1.\, \cot(x) \cdot y' = -y - 3$$

$$\cot(x) \cdot \frac{dy}{dx} = -y - 3$$

$$\frac{1}{\cot(x)} \cdot dx = \frac{dy}{-y-3}$$

$$\int \tan(x)dx = -\int \frac{dy}{y+3}$$

$$-\ln(\cos x) = -\ln(y+3) + c$$

$$\left\{c \equiv \ln(a), a = const\right\}$$

$$\ln(\frac{1}{\cos x}) = \ln(\frac{a}{y+3})$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{a}{y+3}$$

$$y = a\cos x - 3$$

$$2.\, y' = \frac{(2-e^{x})}{3+2y}$$

$$y(0) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2-e^{x})}{3+2y}$$

$$\int (3+2y)dy = \int (2-e^{x})dx$$

$$3y + y^{2} = 2x - e^{x} + c$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow c = 1$$

$$3.\, y' = \frac{x}{y^{2}+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^{2}+1}$$

$$\int (y^{2}+1)dy = \int xdx$$

$$\frac{y^{3}}{3} + y + c = \frac{x^{2}}{2}$$

$$4.\, e^{y} \cdot y' = 2x$$

$$\int e^{y}dy = \int 2xdx$$

$$e^{y} + c = x^{2}$$

$$e^{y} = x^{2} - c$$

$$\left\{\ln(e^{y}) = y\right\}$$

$$y = \ln(x^{2} - c)$$

$$5. y' = \frac{x^2}{y}$$
$$\int y dy = \int x^2 dx$$
$$\frac{y^2}{2} + c = \frac{x^3}{3}$$
$$y^2 = \frac{2x^3}{3} + d, d = const$$
$$y = \pm\sqrt{\frac{2x^3}{3} + d}$$
$$6. y' = xy + y$$
$$\frac{dy}{dx} = y(x+1)$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int (x+1)dx$$
$$\ln(y) + c = \frac{x^2}{2} + x$$
$$\{c \equiv e^a, a = const\}$$
$$y = ae^{\frac{x^2}{2}+x}$$
$$7. (1-x)y' = y^2$$
$$\frac{dy}{dx}(1-x) = y^2$$
$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{(1-x)}$$
$$-\frac{1}{y} + c = -\ln(1-x)$$
$$\frac{1}{y} = \ln(1-x) + c$$
$$y = \frac{1}{\ln(1-x)} + d$$
$$8. (x-1)y' = 4y$$
$$y(2) = 1$$
$$\int \frac{dy}{4y} = \int \frac{dx}{x-1}$$
$$\ln(4y) = \ln(x-1) + c$$
$$\{c \equiv \ln(a), a = const\}$$
$$\frac{1}{4}\ln(y) = \ln(a\cdot(x-1))$$
$$y^{\frac{1}{4}} = a\cdot(x-1)$$
$$y = (a\cdot(x-1))^4$$
$$y(2) = 1 \Rightarrow 1 = a^4, a = \pm 1$$
$$y_p = (x-1)^4$$
$$9. y' + y^2\sin(x) = 0$$
$$y(\pi) = 1$$
$$\frac{dy}{dx} = -y^2\sin(x)$$
$$\int \frac{dy}{y^2} = -\int \sin x dx$$
$$-\frac{1}{y} = \cos x + c$$
$$y = \frac{-1}{\cos x} + c$$
$$y(\pi) = 1 \Rightarrow 1 = 1 + c, c = 0$$
$$y_p = \frac{-1}{\cos x}$$
$$10. dy = 2t(y^2+4)dt$$
$$\int \frac{dy}{y^2+4} = \int 2t dt$$
$$\frac{1}{2}arctg(\frac{y}{2}) + c = t^2$$
$$arctg(\frac{y}{2}) = 2(t^2 - c)$$
$$\frac{y}{2} = tg(2(t^2-c))$$
$$y = 2tg(2(t^2-c))$$