פרק 8- משוואות דיפרנציאליות

8.1 מהי משוואה דיפרנציאלית?

משוואה דיפרנציאלית היא משוואה שקושרת פונקציה לא ידועה לנגזרות שלה, שגם הן לא ידועות. מגוון המשוואות הדיפרנציאליות האפשריות עצום, וכך גם השיטות לפתירתן אך אנו נעסוק רק במשוואות הבסיסיות והשימושיות ביותר.

דוגמא:

$$y = y'$$

איזו פונקציה אנו מכירים ששווה לנגזרת של עצמה?

$y = e^x$ וגם $y' = e^x$ לכן זוהי הפונקציה שפותרת את המשוואה הדיפרנציאלית.

8.2 משוואות מסדר שני

משוואות מסדר שני הן משוואות המכילות גם את הנגזרת השנייה של הפונקציה. באופן כללי- הסדר של המשוואה מעיד על הנגזרת מהסדר הגבוה ביותר במשוואה.
נציג מספר משוואות שימושיות ללימודי הפיזיקה והמכניקה בפרט:

דוגמה פשוטה היא המשוואה $y'' = -y$, איזו פונקציה שווה לנגזרת השנייה של עצמה בסימן מינוס?

ראשית- נשים לב ש- $y = 0$ מהווה פתרון, זהו פתרון שנקרא הפתרון הטריוויאלי, אך זהו לא הפתרון שמעניין אותנו.

הפתרון שמעניין אותנו הוא $y = \sin x$. מדוע הוא מהווה פתרון?

נגזור את הפונקציה, נציב ונבדוק האם מתקבל פסוק אמת: $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$ ואכן $\sin x = -(-\sin x)$.

האם קיימת עוד פונקציה המקיימת את המשוואה? $y = \cos x$ גם היא מקיימת. נבדוק:

$y' = -\sin x$, $y'' = -\cos x$ ואכן $\cos x = -(-\cos x)$.

איך יתכן שהתקבל יותר מפתרון אחד?
זוהי תכונה של משוואות דיפרנציאליות מסדר שני- יש להן שני פתרונות (עם אילוצים מסוימים עליהם לא נרחיב כאן) שגם הצירוף שלהם מהווה פתרון למשוואה. למשל- למשוואה הנ"ל גם $y = A\sin x + B\cos x$ מהווה פתרון כאשר A ו-B הם קבועים (על הסיבות להימצאותם בפתרון תלמדו בהרחבה בהמשך) .

דוגמא נוספת למשוואה כזו היא החוק השני של ניוטון- $\vec{F} = m\vec{a}$ המתאר את הקשר בין הזמן והמיקום של גוף מסוים, עליו פועל כוח F, נוכל לכתוב את הקשר הזה באופן הבא:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(x(t))$$

הפתרון, יהיה כמובן הפונקציה- $x(t)$.

נביא דוגמא למשוואה המתארת מקרה נפוץ וחשוב (זוהי דוגמה מסובכת מעט אך ההיכרות איתה תעזור לכם בלימודי המכניקה):

זהו מקרה פרטי של החוק השני של ניוטון כפי שתיארנו, כאשר הכוח הוא כוח קפיצי. במקרה זה הכוח באמת תלוי במיקום הגוף. ניזכר כי הכוח הקפיצי נכתב כך: $F = -kx$ כאשר x הוא שיעור המתיחה של הקפיץ.

אם נכתוב את החוק השני של ניוטון עבור מסה שהכוח היחידי הפועל עליה הוא הכוח הקפיצי, נכתוב: $F = -kx = ma$
ואם נכתוב זאת כמשוואה דיפרנציאלית, נכתוב-

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

את הפתרון למשוואה זו נציג ללא הוכחה:

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

כאשר ω **היא התדירות הזוויתית** של התנודה של הקפיץ- ככל שהיא גבוהה יותר, זמן המחזור קצת יותר, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

A **, היא משרעת התנודה**- ההעתק הגדול ביותר של המסה מנקודת שיווי המשקל ($x = 0$), $A = x_{\max}$.

הקשר בין זמן המחזור והתדירות הזוויתית: $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

8.2 שיטת הפרדת משתנים

שיטת הפרדת משתנים היא שיטה לפתרון משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון מהצורה הבאה:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

כלומר, קשר בין נגזרת מסדר ראשון של הפונקציה לאיזושהי פונקציה שתלויה ב-X בלבד. במצב כזה אנו יכולים על ידי התהליך שנציג כאן להביא למצב בו באגף אחד של המשוואה תיהיה פונקציה שתלויה ב-X בלבד ובאגף השני ב-Y בלבד. זו השיטה השימושית ביותר והנפוצה ביותר לפתרון משוואות מסדר ראשון.

בכדי לבצע את ההפרדה נפעיל $\int dx$ על שני האגפים:

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx$$

באגף השמאלי נוכל לצמצם את $\frac{dx}{dx}$ כי הנגזרת של X לפי X היא 1. ונישאר עם:

$$\int dy = \int f(x) dx$$

וכעת, על ידי ביצוע האינטגרל בשני האגפים נוכל לפתור את המשוואה:

$$y = F(x) + c$$

דוגמא:

$$y' = 3 + x - x^5$$

$$\frac{dy}{dx} = 3 + x - x^5$$

$$\int dy = \int (3 + x - x^5) dx$$

$$y = 3x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6} + c$$